

第 8 章：个性化联邦学习

思考题 8.1

根据权重发散 (Weight Divergence) 的定义，其计算公式为衡量联邦模型与集中式模型权重的偏离程度 (通常使用 L2 范数)：

$$\text{weight_divergence} = \frac{\|w^{\text{FedAvg}} - w^{\text{cent}}\|}{\|w^{\text{cent}}\|}$$

已知： $w^{\text{FedAvg}} = [1.2, -0.5, 3.1]$ ， $w^{\text{cent}} = [1.0, -0.3, 3.0]$ 。

首先计算分子部分的向量差及其 L2 范数：

$$w^{\text{FedAvg}} - w^{\text{cent}} = [1.2 - 1.0, -0.5 - (-0.3), 3.1 - 3.0] = [0.2, -0.2, 0.1]$$

$$\|w^{\text{FedAvg}} - w^{\text{cent}}\| = \sqrt{0.2^2 + (-0.2)^2 + 0.1^2} = \sqrt{0.04 + 0.04 + 0.01} = \sqrt{0.09} = 0.3$$

然后计算分母部分集中式训练模型权重的 L2 范数：

$$\|w^{\text{cent}}\| = \sqrt{1.0^2 + (-0.3)^2 + 3.0^2} = \sqrt{1.0 + 0.09 + 9.0} = \sqrt{10.09} \approx 3.176$$

最后计算权重发散值：

$$\text{weight_divergence} = \frac{0.3}{3.176} \approx 0.0944$$

保留两位小数，最终权重发散值为 **0.09**。

思考题 8.2

已知参与方数量 $K = 2$ ，权重向量 $w_1 = [2.0, 1.5]$ ， $w_2 = [1.8, 1.2]$ ，超参数 $\lambda = 0.5$ 。

第一步，计算全局模型参数 \bar{w} ：

$$\bar{w} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2) = \frac{1}{2}([2.0, 1.5] + [1.8, 1.2]) = \frac{1}{2}([3.8, 2.7]) = [1.9, 1.35]$$

第二步，分别计算每个本地模型参数与全局模型参数之间偏差的平方 (即欧氏距离的平方)：对于参与方 1：

$$\|w_1 - \bar{w}\|^2 = \|[2.0 - 1.9, 1.5 - 1.35]\|^2 = \|[0.1, 0.15]\|^2 = 0.1^2 + 0.15^2 = 0.01 + 0.0225 = 0.0325$$

对于参与方 2：

$$\|w_2 - \bar{w}\|^2 = \|[1.8 - 1.9, 1.2 - 1.35]\|^2 = \|[-0.1, -0.15]\|^2 = (-0.1)^2 + (-0.15)^2 = 0.01 + 0.0225 = 0.0325$$

第三步，计算题目所求的完整正则化项 $\frac{\lambda}{2K} \sum_{i=1}^K \|w_i - \bar{w}\|^2$ ：

$$\sum_{i=1}^2 \|w_i - \bar{w}\|^2 = 0.0325 + 0.0325 = 0.065$$

$$\text{正则化项} = \frac{0.5}{2 \times 2} \times 0.065 = 0.125 \times 0.065 = 0.008125$$

因此，该正则化项的具体数值为 **0.008125**。

思考题 8.3

根据结构分解策略（如 FedPer 算法），基础层参数的聚合公式为加权平均：

$$W_B^{t+1} = \sum_{i=1}^K r_i W_{i,B}^{t+1}$$

代入题目给定的参数与权重值进行计算：

$$W_B^{t+1} = 0.3 \times [0.8, 1.2] + 0.4 \times [1.0, 1.0] + 0.3 \times [1.2, 0.8]$$

分别计算各乘积项：

$$0.3 \times [0.8, 1.2] = [0.24, 0.36]$$

$$0.4 \times [1.0, 1.0] = [0.4, 0.4]$$

$$0.3 \times [1.2, 0.8] = [0.36, 0.24]$$

将上述结果按位相加：

$$W_B^{t+1} = [0.24 + 0.4 + 0.36, 0.36 + 0.4 + 0.24] = [1.0, 1.0]$$

因此，服务端聚合后的基础层参数为 **[1.0, 1.0]**。

思考题 8.4

设计的计算问题示例：在一个包含两个参与方的联邦学习系统中，当前在第 t 轮迭代后，服务端下发的全局教师模型参数为 $w^{(t)} = [0.5, 0.8]$ 。参与方 1 和参与方 2 的本地学生模型参数分别训练为 $w_1^{(t)} = [0.2, 0.4]$ 和 $w_2^{(t)} = [0.9, 0.6]$ 。设定知识蒸馏参数 $\alpha = 0.6$ （即本地知识保留 0.6，全局知识引入 0.4）。请计算经过该知识蒸馏规则融合后，参与方 1 和参与方 2 在第 $t+1$ 轮的初始本地模型参数 $w_1^{(t+1)}$ 和 $w_2^{(t+1)}$ 。

解题步骤：根据给定的更新规则：

$$w_i^{(t+1)} = \alpha \cdot w_i^{(t)} + (1 - \alpha) \cdot w^{(t)}$$

对于参与方 1 ($i = 1$):

$$w_1^{(t+1)} = 0.6 \times [0.2, 0.4] + (1 - 0.6) \times [0.5, 0.8]$$

$$w_1^{(t+1)} = [0.12, 0.24] + 0.4 \times [0.5, 0.8]$$

$$w_1^{(t+1)} = [0.12, 0.24] + [0.2, 0.32]$$

$$w_1^{(t+1)} = [0.32, 0.56]$$

对于参与方 2 ($i = 2$):

$$w_2^{(t+1)} = 0.6 \times [0.9, 0.6] + (1 - 0.6) \times [0.5, 0.8]$$

$$w_2^{(t+1)} = [0.54, 0.36] + [0.2, 0.32]$$

$$w_2^{(t+1)} = [0.74, 0.68]$$

最终结论：更新后的本地模型参数分别为 $w_1^{(t+1)} = [0.32, 0.56]$ ， $w_2^{(t+1)} = [0.74, 0.68]$ 。